

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА

Н.В. Середя, М.Ю. Смолянінов О.О. Чупринін

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до самостійної роботи та виконання розрахунково-графічних  
і практичних завдань з курсу опору матеріалів

**«ЗГІН БАЛОК ТА РАМ»**

*(для студентів 2 курсу денної і заочної форм навчання  
бакалаврів за напрямом 0921 (6.060101) - «Будівництво»  
з професійного спрямування «Міське будівництво і господарство»,  
«Теплогазопостачання та вентиляція»)*

Методичні вказівки до самостійної роботи та виконання розрахунково-графічних і практичних завдань з курсу опору матеріалів «Згін балок та рам» (для студентів 2 курсу денної і заочної форм навчання бакалаврів за напрямом 0921 (6.060101) - «Будівництво» з професійного спрямування «Міське будівництво і господарство», «Теплогазопостачання та вентиляція») / Укл.: Серeda Н.В., Смолянінов М.Ю, Чупринін О.О. – Харків: ХНАМГ, 2009. – 31 с.

Укладачі: Н.В. Серeda, М.Ю. Смолянінов О.О. Чупринін

Рецензент: завідувач кафедри теплохолодopостачання  
проф. М.О. Шульга

Рекомендовано кафедрою теоретичної і будівельної механіки,  
протокол № 17 від 24.06.09

## 1. ВСТУП

Опір матеріалів – теоретично-експериментальна наука. Вона розробляє аналітичні методи розрахунку елементів конструкцій, а також експериментально вивчає механічні властивості матеріалів, з яких виготовлено ці елементи, під дією навантажень. У теоретичній частині ця наука базується на теоретичній механіці й математиці, а в експериментальній – на фізиці та матеріалознавстві. Отже, опір матеріалів – це найбільш загальна наука про міцність машин і споруд. Однак вона не вичерпує всіх питань механіки деформівних тіл. Цими питаннями займаються й інші суміжні дисципліни: будівельна механіка стержневих систем, теорія пружності, теорія пластичності.

При проектуванні різноманітних конструкцій доводиться обирати матеріал і геометричні параметри, виходячи з розуміння надійності і матеріалоемності. Для цього необхідно проводити розрахунки на міцність, жорсткість і стійкість різних тіл, і елементів конструкцій. Опір матеріалів у практичних розрахунках розглядає не саму конструкцію, а її розрахункову схему – реальне тіло, звільнене від впливу несуттєвих факторів. Основним елементом, що розглядає опір матеріалів є брус (стрижень, балка, вал) із прямолінійною віссю (прямолінійний брус), тобто тіло, у якого розмір в одному напрямку (довжина) набагато більше двох інших (поперечних) розмірів.

Користуючись законами теоретичної механіки й відповідним математичним апаратом, опір матеріалів розглядає питання міцності, жорсткості та стійкості машин і споруд.

Таким чином, опір матеріалів – одна з найважливіших дисциплін, що вивчаються студентами у вищих технічних навчальних закладах.

Ці методичні вказівки призначені для самостійної роботи студентів при підготовці до практичних занять і виконання розрахунково-графічного завдання. Вони містять теоретичні положення і вихідні дані для завдання. Вихідні дані беруть за вказівкою викладача.

Перш ніж приступити до виконання завдання, слід ознайомитися з теоретичним матеріалом, викладеним у цих методичних вказівках та списку літератури.

У роботі прийнята міжнародна система одиниць СІ.

## **2. ОФОРМЛЕННЯ РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНОЇ РОБОТИ**

1. Роботу виконують на аркушах паперу стандартного формату А4.

2. Обкладинку роблять із щільного паперу для креслення. На титульному аркуші вказують назву й номер розрахунково-графічного завдання, найменування дисципліни, прізвище, ім'я та по батькові студента, його шифр, назву факультету, групу, прізвище та ініціали викладача.

3. Розв'язання кожної задачі слід починати із зазначення її номера, назви, переписати повністю умову задачі, числові дані й навести розрахункову схему.

4. Вирішення задачі має супроводжуватись короткими поясненнями, рисунками та ескізами.

5. Креслення і графіки виконують на міліметровому аркуші обов'язково в певному масштабі. На кресленнях треба вказати буквені позначення і числові значення усіх величин, використаних у розрахунках.

6. Вирішуючи задачу, слід спочатку одержати результат в алгебраїчному вигляді, а потім підставити відповідні числові значення. Одержаний в числовому вигляді результат підкреслити й обов'язково вказати одиниці виміру.

### 3. ВИХІДНІ ДАНІ Й ЗАВДАННЯ ДО РОБОТИ

#### Завдання 1

#### ПОБУДОВА ЕПЮР ПОПЕРЕЧНИХ СИЛ І ЗГИНАЮЧИХ МОМЕНТІВ ДЛЯ БАЛКИ З ОДНИМ ЗАПРАВЛЕНИМ І ДРУГИМ ВІЛЬНИМ КІНЦЯМИ

Для заданої сталюї балки необхідно:

- 1) побудувати епюри поперечних сил і згинаючих моментів;
- 2) визначити її переріз, прийнявши  $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ .

#### *Методичні вказівки до завдання 1 і порядок його виконання*

1. Згідно з шифром вибрати схему балки на рис. 1 та вихідні дані до неї з табл. 1.
2. Накреслити розрахункову схему балки в певному масштабі, вказати всі розміри й зусилля, що діють на неї.
3. Побудувати епюру поперечних сил і згинаючих моментів. Епюри балок з одним заправленим і другим вільним кінцями можна побудувати без попереднього визначення опорних реакцій, незалежно від виду навантаження та розміщення опор.

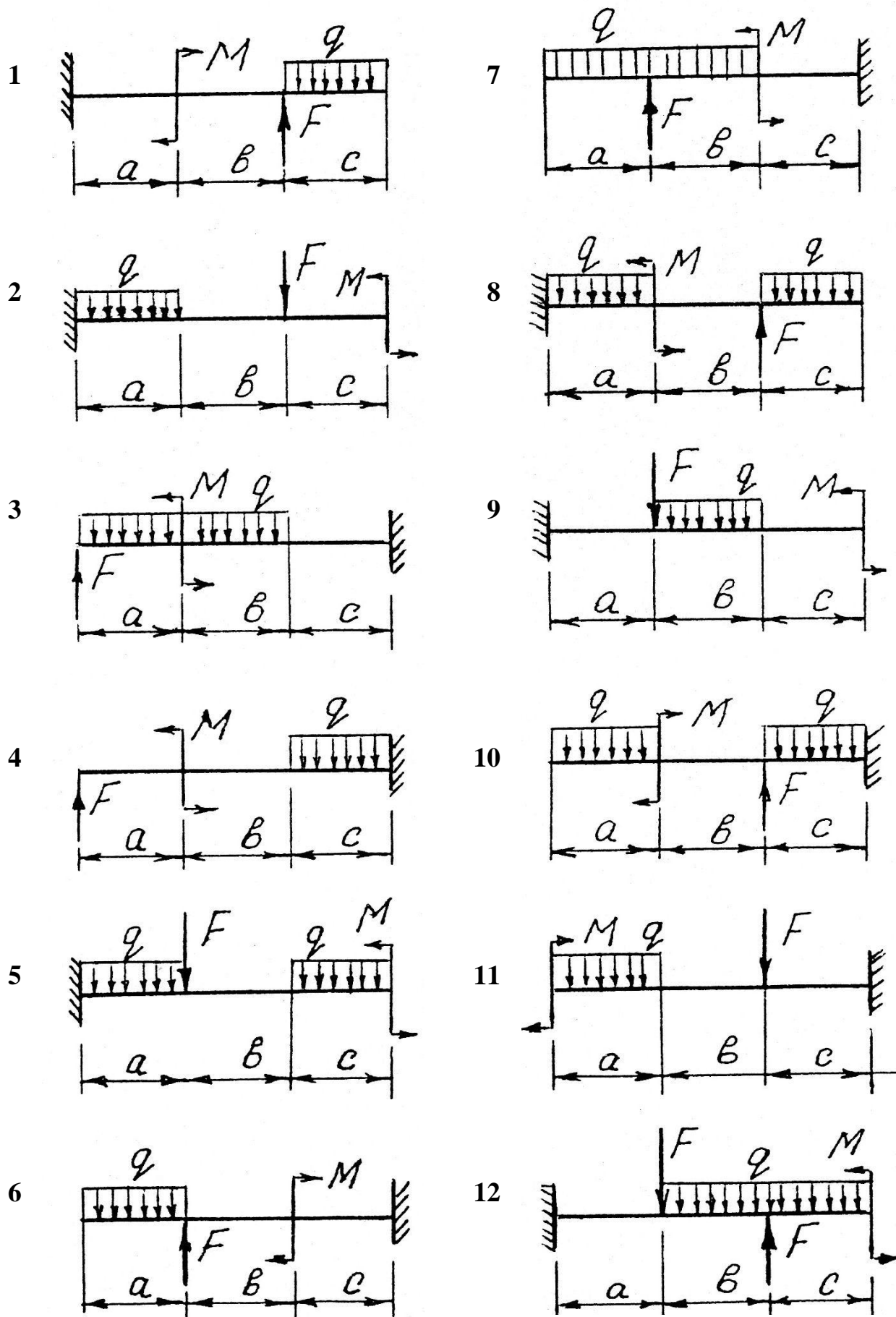


Рис. 1

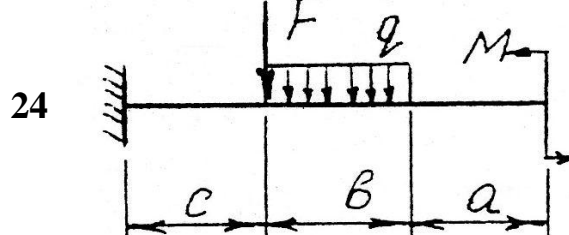
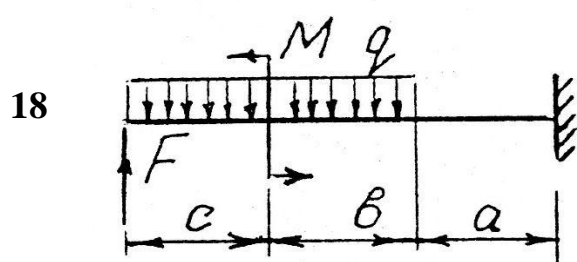
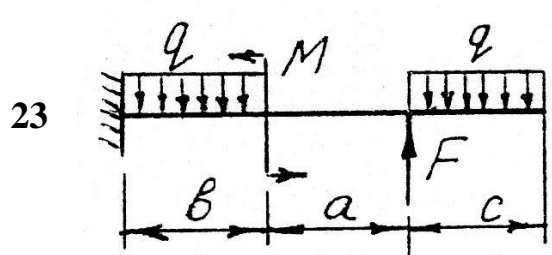
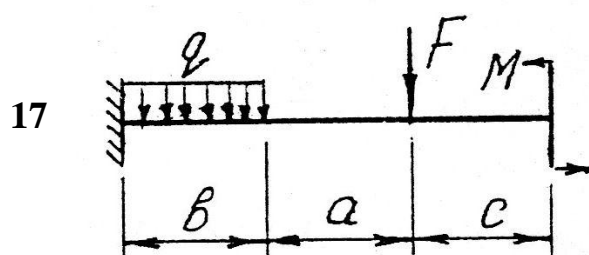
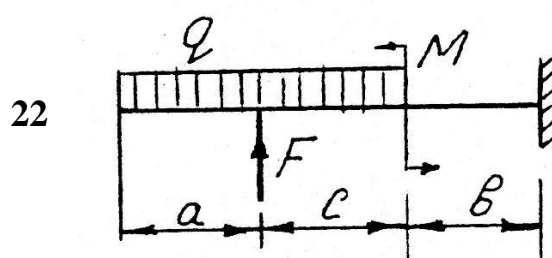
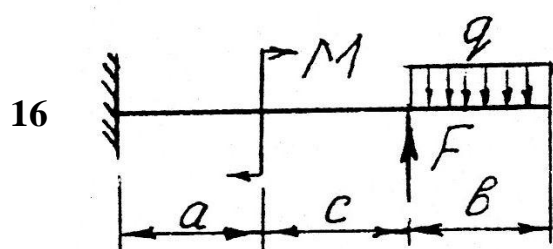
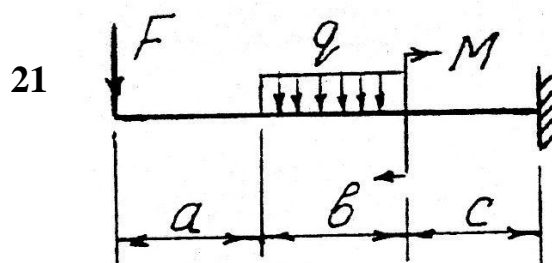
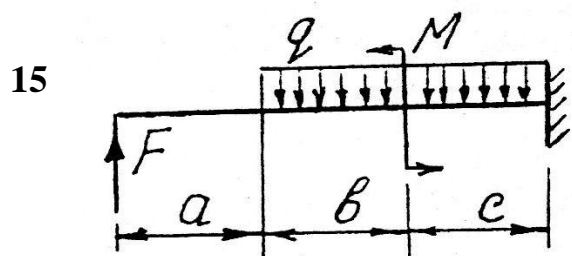
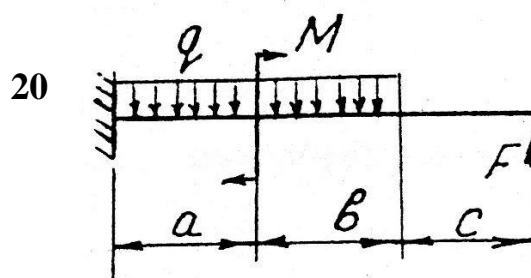
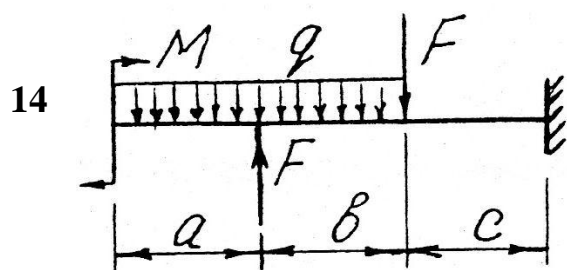
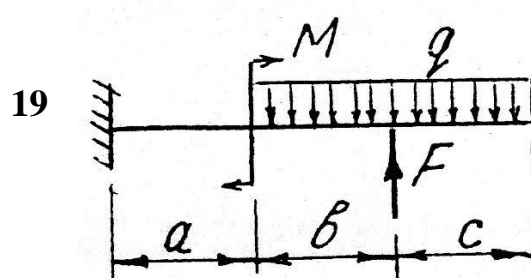
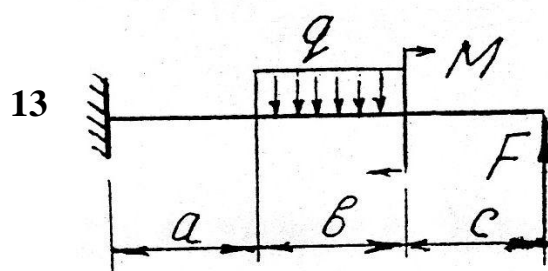


Рис. 1. Продолжения.

Таблиця 1. Вихідні дані до завдання 1

№ п/п	$a$ , м	$b$ , м	$c$ , м	$F$ , кН	$M$ , кН·м	$q$ кН/м
1	2,5	3,0	1,0	10	40	10
2	3,0	2,0	1,5	30	20	20
3	2,0	2,5	1,0	20	30	30
4	1,0	3,0	0,5	15	50	5
5	0,5	2,0	1,5	35	40	15
6	3,0	3,0	0,5	25	30	25
7	2,5	2,5	1,0	10	20	10
8	1,5	3,0	0,5	40	10	20
9	1,0	2,5	1,0	30	40	30
10	2,0	2,0	1,5	20	20	10
11	3,0	3,0	1,0	10	30	10
12	2,0	2,0	0,5	30	50	20
13	2,5	2,5	1,5	10	40	30
14	3,0	3,0	1,0	30	30	5
15	3,0	2,0	0,5	20	40	15
16	2,0	3,0	1,5	15	20	10
17	2,5	2,5	1,0	35	30	20
18	3,0	3,0	0,5	40	50	30
19	2,0	2,5	1,5	10	40	5
20	3,0	2,0	1,5	30	20	15
21	2,5	3,0	1,0	20	30	25
22	3,0	2,0	0,5	15	50	20
23	2,5	2,5	1,5	35	40	30
24	2,0	3,0	0,5	15	30	5



Побудову епюр таких балок починають від вільного кінця балки. В основу побудови епюр покладено метод перерізів.

При побудові епюри  $Q$  і  $M$  необхідно дотримуватись правила знаків.

*Якщо зовнішні сили мають повернути балку навколо перерізу за годинниковою стрілкою, то їх слід приймати зі знаком плюс, а якщо проти – із знаком мінус (рис. 2).*

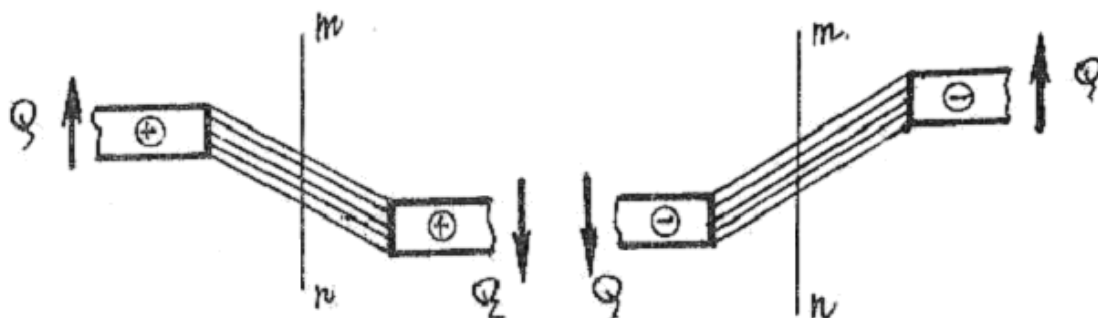


Рис. 2. Правило знаків для зовнішніх сил при визначенні  $Q$

Правило знаків для моментів: згинаючий момент вважається додатним, якщо в розглянутому перерізі балка згинається опуклістю вниз (нижні волокна розтягнуті), і від'ємним - якщо балка згинається опуклістю догори (верхні волокна розтягнуті) (рис. 3).

Епюру згинаючих моментів  $M$  будують на стороні розтягнутих волокон (додатні значення відкладають від осі епюри вниз, від'ємні – вверху).

Ординати епюр  $Q$  і  $M$  відкладають під прямим кутом до базисної лінії.

Згинаючі моменти на шарнірних опорах дорівнюють нулю, максимальні й мінімальні значення на епюрі  $M$  відповідають зміні знаків на епюрі  $Q$ .

При побудові епюр слід пам'ятати, що розриви на епюрах  $Q$  мають місце там, де прикладені зосереджені сили (в тому числі реакції), а на епюрах  $M$  – в місцях прикладання зосереджених зовнішніх моментів.

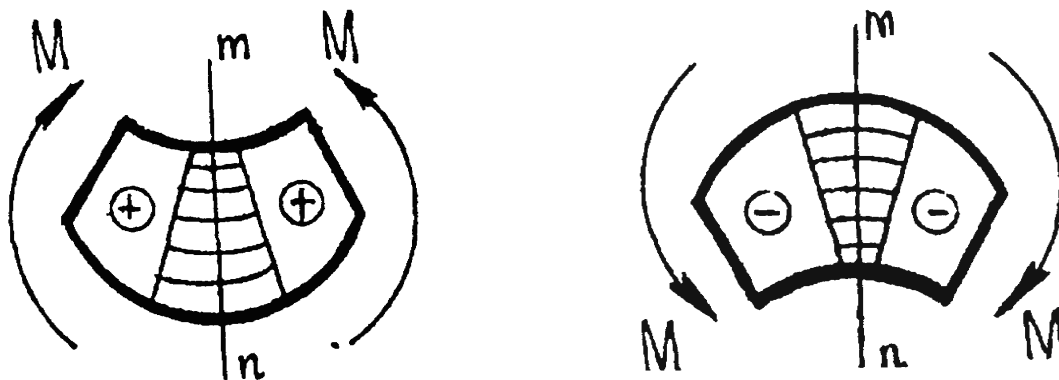


Рис. 3. Правило знаків для моментів зовнішніх сил при визначенні згинаючих моментів  $M$

4. Добір поперечного перерізу двотаврової балки проводять за умови міцності при згинанні:

$$W_z \geq \frac{M_{max}}{[\sigma]}.$$

5. При великих згинаючих моментах бувають випадки, коли неможливо підібрати стандартний прокатний профіль, бо потрібний момент опору більший, ніж є в ДСТУ (див. додаток). Тоді треба прийняти балку з двох стандартних профілів, поставлених поряд, а номер профілю визначити з умови  $0,5 \cdot W_z$  (де  $W_z$  знайдено розрахунком).

## Завдання 2

### РОЗРАХУНОК БАЛКИ НА ЗГИН ТА ПІДБІР ЇЇ ПОПЕРЕЧНОГО ПЕРЕРІЗУ

Для заданої балки необхідно:

- 1) визначити опорні реакції;
- 2) побудувати епюри поперечних сил  $Q$  і згинаючих моментів  $M$ ;
- 3) підібрати поперечний переріз балки, вважаючи, що вона виготовлена з деревини і має  $[\sigma] = 10 \text{ МПа}$ .

### **Методичні вказівки до завдання 2 і порядок його виконання**

1. Згідно з шифром вибрати схему балки на рис. 4 та вихідні дані до неї з табл. 2.

2. Накреслити в масштабі розрахункову схему балки.

3. За допомогою рівнянь статки визначити вертикальні реакції на опорах. Якщо в результаті розрахунку реакція виявиться зі знаком мінус, то напрям вибраної реакції слід змінити на протилежний. Для контролю правильності визначення реакції скласти рівняння рівноваги, що не було використане при визначенні реакцій.

4. Побудувати епюри поперечних сил  $Q$  і згинаючих моментів  $M$ . Встановити границі ділянок завантаження з урахуванням розміщення силових факторів. Для кожної ділянки записати рівняння  $Q_i = f(z_i)$  та  $M_i = f(z_i)$ , за допомогою яких визначити величини поперечних сил і згинаючих моментів на границях ділянок.

Для визначення максимального значення  $M_i^{max}$  на ділянці з рівномірно розподіленим навантаженням використати диференційну залежність

$$\frac{dM}{dz} = Q.$$

Епюри  $Q$  і  $M$  викреслити під розрахунковою схемою балки, вказати на числові значення ординати на границях ділянок.

5. Виходячи з умови міцності

$$W_z \geq \frac{M_{max}}{[\sigma]},$$

підібрати переріз балки прямокутного ( $h = 2b$ ) і круглого профілю.

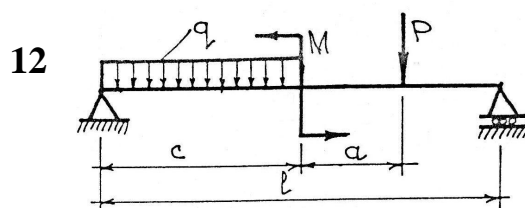
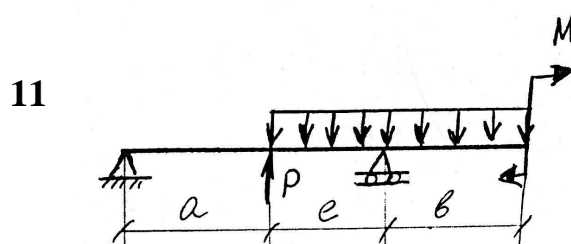
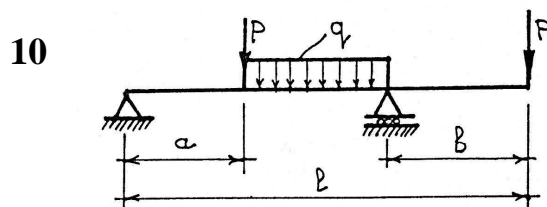
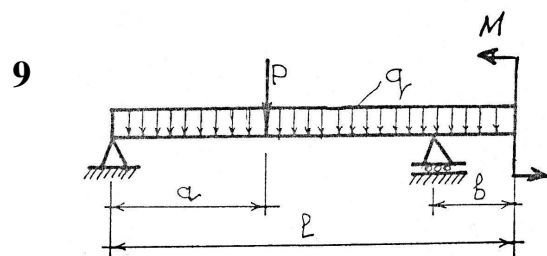
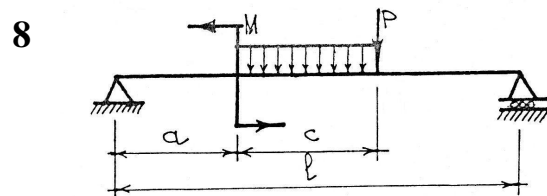
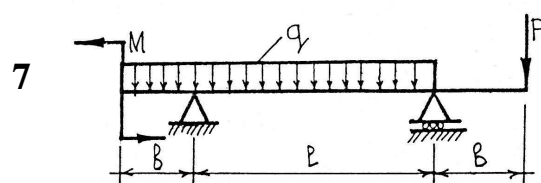
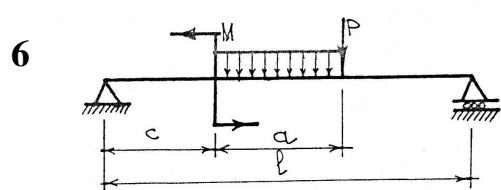
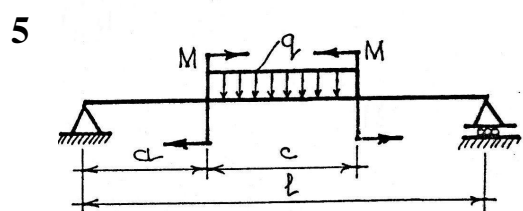
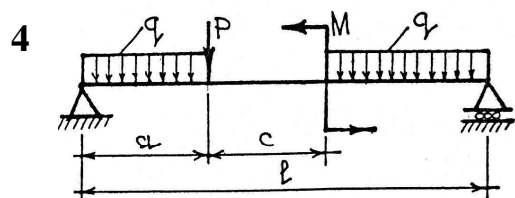
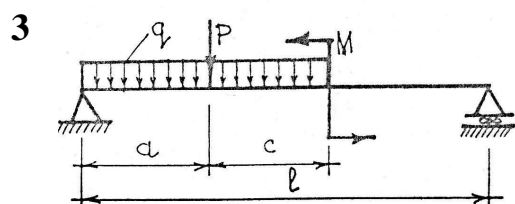
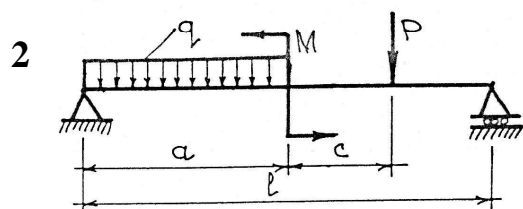
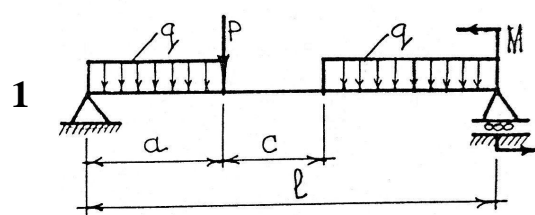
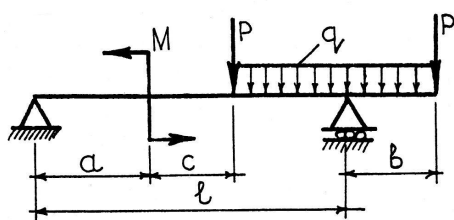
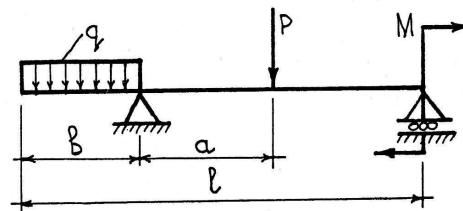


Рис. 4

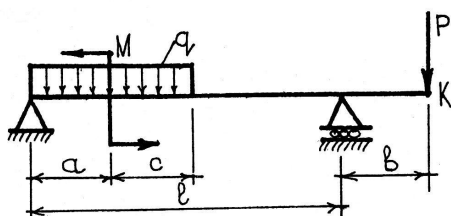
13



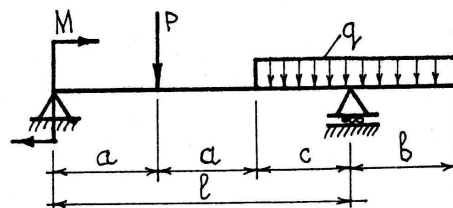
19



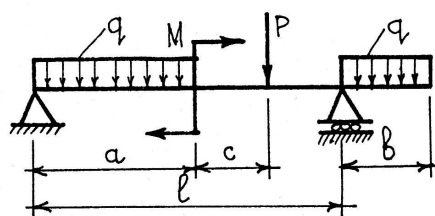
14



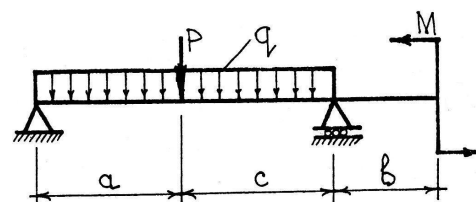
20



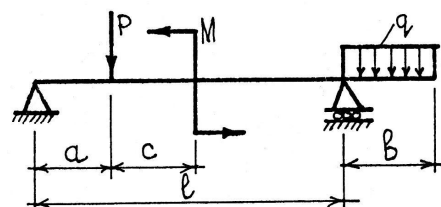
15



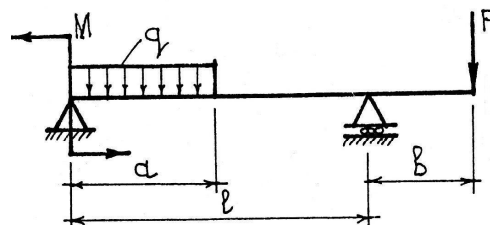
21



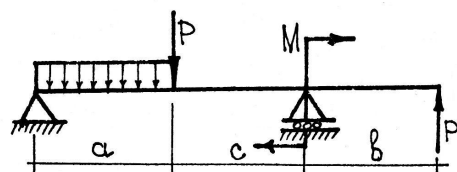
16



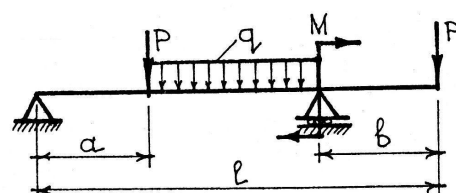
22



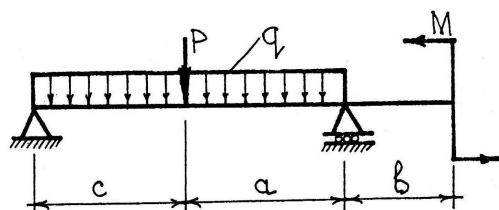
17



23



18



24

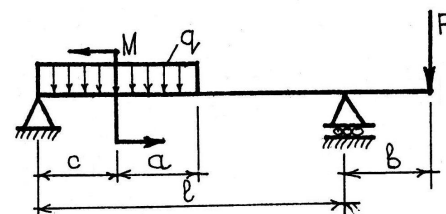


Рис. 4. Продовження.

Таблиця 2. Вихідні дані до завдання 2

№ п/п	$a$ , м	$b$ , м	$c$ , м	$\ell$ , м	$P$ , кН	$M$ , кН·м	$q$ кН/м
1	2,5	3,0	1,0	8	30	25	20
2	3,0	2,0	1,5	9	10	10	30
3	2,0	2,5	1,0	6	30	40	5
4	1,0	3,0	0,5	5	20	30	15
5	0,5	2,0	1,5	9	30	20	20
6	3,0	3,0	0,5	0	10	10	30
7	2,5	2,5	1,0	8	30	30	5
8	1,5	3,0	0,5	7	20	10	15
9	1,0	2,5	1,0	9	15	40	25
10	2,0	2,0	1,5	6	30	20	10
11	3,0	3,0	1,0	7	10	30	10
12	2,0	2,0	0,5	8	30	25	20
13	2,5	2,5	1,5	8	20	10	30
14	3,0	3,0	1,0	9	15	40	5
15	3,0	2,0	0,5	6	20	30	15
16	2,0	3,0	1,5	5	15	20	10
17	2,5	2,5	1,0	9	35	10	20
18	3,0	3,0	0,5	10	40	30	20
19	2,0	2,5	1,5	8	10	40	30
20	3,0	2,0	1,5	7	30	20	5
21	2,5	3,0	1,0	9	20	30	15
22	3,0	2,0	0,5	6	15	50	25
23	2,5	2,5	1,5	7	35	40	10
24	2,0	3,0	0,5	8	15	30	5

### Завдання 3

#### ПОБУДОВА ЕПЮР ЗГИНАЮЧИХ МОМЕНТІВ, ПОПЕРЕЧНИХ І ПОЗДОВЖНИХ СИЛ У РАМАХ

Для заданої рами потрібно:

- 1) визначити опорні реакції;
- 2) побудувати епюри згинаючих моментів  $M$ , поперечних  $Q$  і поздовжніх  $N$  сил.

#### *Методичні вказівки до завдання 3 і порядок його виконання*

1. Згідно з шифром вибрати схему балки на рис. 5 та вихідні дані до неї з табл. 3.
2. Накреслити в масштабі розрахункову схему рами.
3. За допомогою рівнянь статки визначити вертикальні й горизонтальні реакції на опорах. Контроль правильності визначення реакцій проводити за рівнянням рівноваги, що не було використане при визначенні реакцій.
4. Побудувати епюри згинаючих моментів, поперечних і поздовжніх сил.

Для цього, користуючись методом перерізів, розподілити раму на ділянки, встановити границі їх завантаження. Для кожної ділянки записати рівняння  $M_i = f(z_i)$ ,  $Q_i = f(z_i)$ ,  $N_i = f(z_i)$ , що дозволяють визначити величини  $M$ ,  $Q$  і  $N$  на границях ділянок.

Епюри  $M$ ,  $Q$  і  $N$  будують на геометричній схемі рами по осях стояків і ригелів. Умовно вважається, що споглядач знаходиться в середині контуру рами.

На епюрі  $M$ , як правило, знаки не ставлять, а ординати згинаючих моментів відкладають обов'язково з боку розтягнутих волокон. Епюри  $Q$  і  $N$  позначають знаками згідно з правилами.

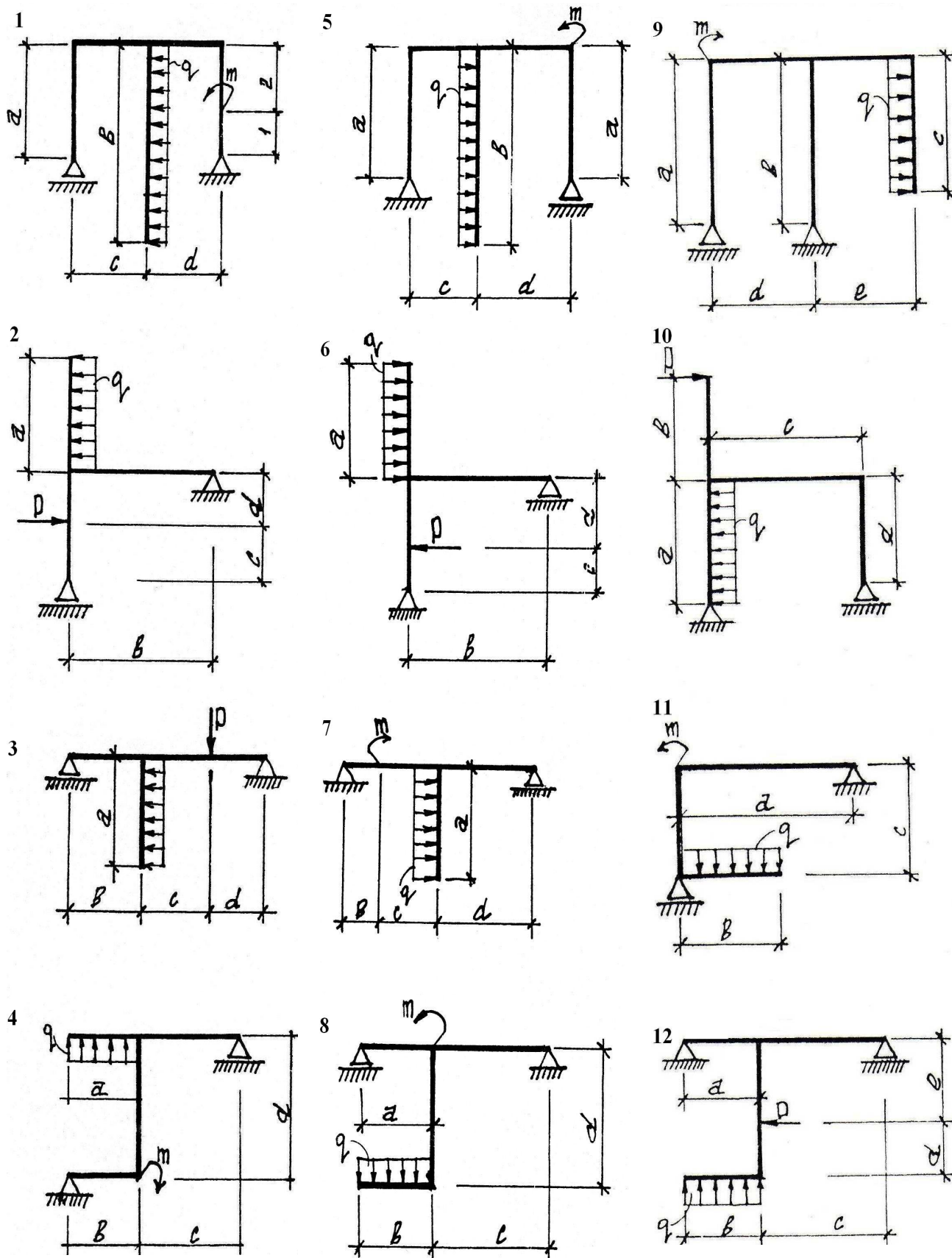


Рис. 5



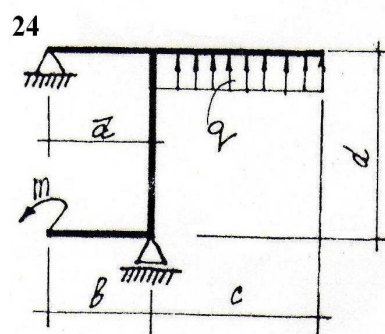
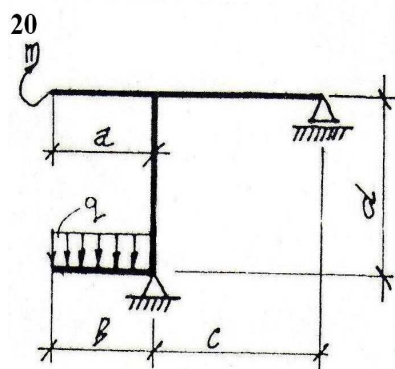
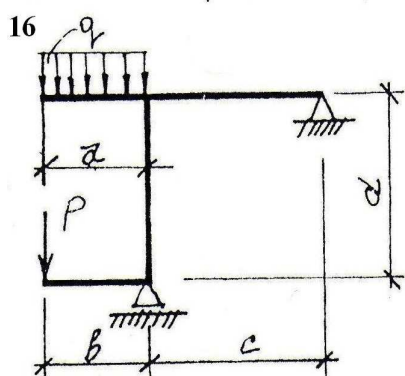
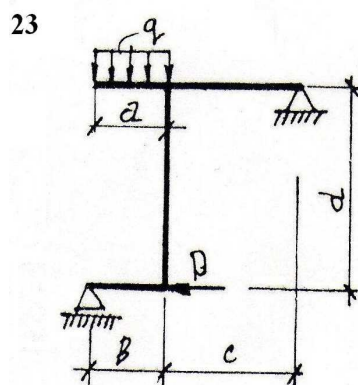
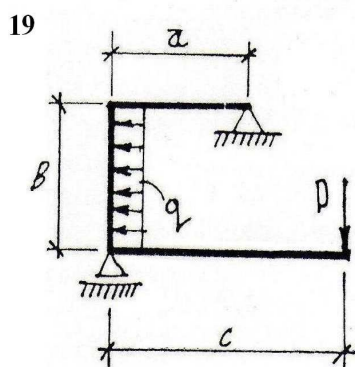
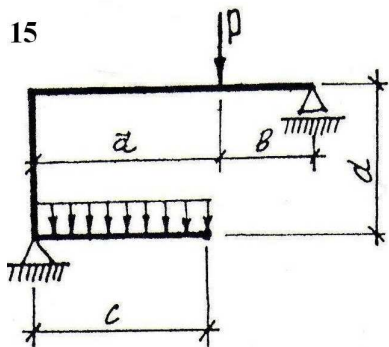
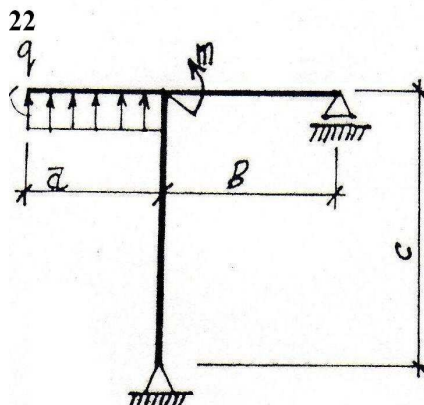
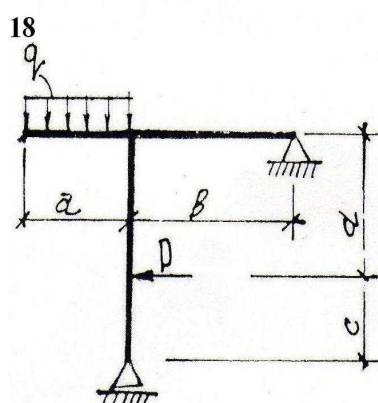
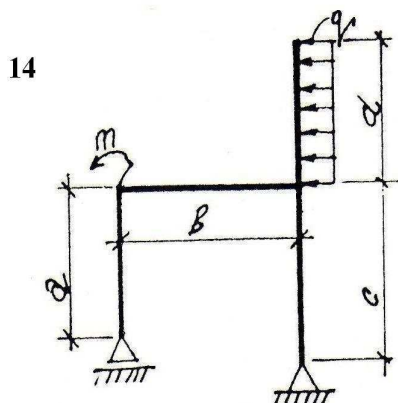
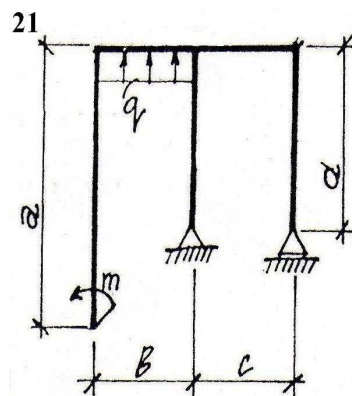
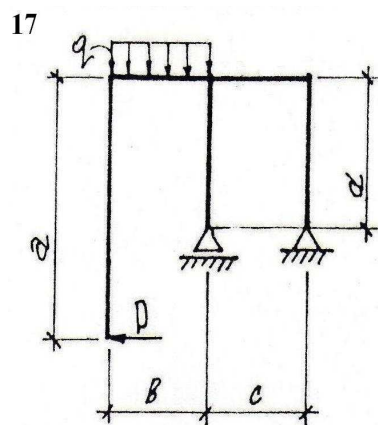
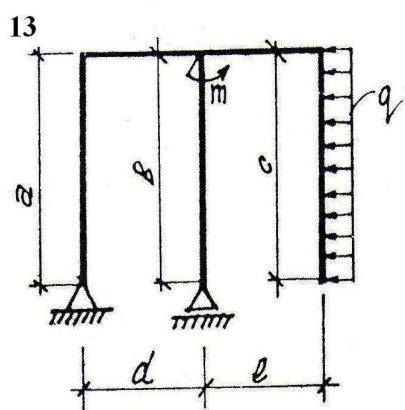


Рис. 5. Продолжения

Таблиця 3. Вихідні дані до завдання 3

№ п/п	$a$ , м	$b$ , м	$c$ , м	$d$ , м	$P$ , кН	$m$ , кН·м	$q$ кН/м
1	2,0	2,5	0,5	1,0	30	25	20
2	1,0	3,0	1,0	1,0	10	10	30
3	0,5	2,0	0,5	1,5	30	40	5
4	3,0	3,0	1,0	1,0	20	30	15
5	2,5	2,5	1,5	1,0	30	20	20
6	1,5	3,0	0,5	1,5	10	10	30
7	1,0	2,5	1,0	1,0	30	30	5
8	2,0	3,0	0,5	0,5	20	10	15
9	1,0	2,5	1,0	1,5	15	40	25
10	2,0	2,0	1,5	0,5	30	20	10
11	3,0	3,0	1,0	1,5	10	30	10
12	2,0	2,5	0,5	1,0	30	25	20
13	2,5	3,0	1,5	0,5	20	10	30
14	2,0	2,0	1,0	1,5	15	40	5
15	1,0	3,0	0,5	0,5	20	30	15
16	0,5	2,5	0,5	1,5	15	20	10
17	3,0	2,5	1,0	1,0	35	10	20
18	2,5	3,0	0,5	0,5	40	30	20
19	1,5	2,5	1,0	1,5	10	40	30
20	1,0	2,0	1,5	1,0	30	20	5
21	2,0	3,0	1,0	0,5	20	30	15
22	3,0	2,0	0,5	1,5	15	50	25
23	2,5	2,5	1,5	1,0	35	40	10
24	2,0	3,0	0,5	0,5	15	30	5

5. Для визначення знаків  $Q$  і  $M$  слід користуватись правилами, наведеними для балок (див. завдання 1). Для поздовжньої сили  $N$ , існує правило: *поздовжня сила вважається додатною при розтягненні стержня і від'ємною - при стиску*.

6. Перевірити правильність побудови епюр  $M$ ,  $Q$  і  $N$  виходячи з умови рівноваги всіх вузлів рами.

#### 4. ПРИКЛАДИ РОЗРАХУНКІВ

##### *Приклад 1.*

Побудувати епюру внутрішніх зусиль для балки, приведеної на рис. 6,а і визначити максимальні значення внутрішніх зусиль, що діють у балці, якщо  $F=40$  кН.

##### *Рішення.*

Для побудови епюр поперечної сили  $Q$  і згинального моменту  $M$  розраховуємо балку. Розрахунок починаємо з визначення опорних реакцій  $R_A$  і  $R_B$  балки, яка є однопрогінною балкою. При визначенні опорних реакцій слід використовувати раціональні рівняння рівноваги, тобто такі, до шкільного з яких входять лише одна реакція:

$$\sum M_A = R_B \cdot 6.4 - F \cdot 2.4 = 0;$$

$$R_B = \frac{F \cdot 2.4}{6.4} = \frac{40 \cdot 2.4}{6.4} = 15 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = -R_A \cdot 6.4 + F \cdot 4 = 0;$$

$$R_A = \frac{F \cdot 4}{6.4} = \frac{40 \cdot 4}{6.4} = 25 \text{ кН}.$$

Для перевірки візьмемо суму проекцій сил на вісь у:

$$\sum F_y = 0;$$

$$\sum F_y = R_A - F + R_B = 25 - 40 + 15 = 0.$$

Перед побудовою епюр внутрішніх зусиль балку розіб'ємо на ділянки.

Межами ділянок повинні бути: крапки прикладання зосереджених сил і моментів, початок і кінець розподілених навантажень.

У нашому прикладі на балці таких ділянок – дві. Правила знаків для визначення внутрішніх зусиль наведено на рис. 2-3.

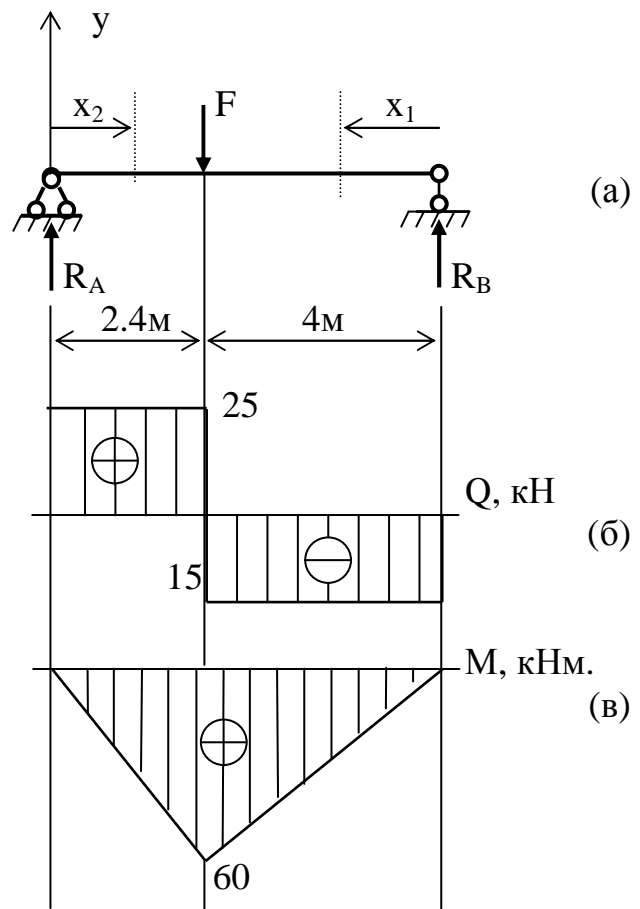


Рис. 6

Спочатку побудуємо епюру поперечних сил, які дорівнюють алгебраїчній сумі проекцій лівих (правих) сил на нормаль до осі балки. Для цієї балки потрібно перерізи проводити двічі, на кожній ділянці окремо. Потім розглядати ту частину умовно розрізаної балки, на котрій діє менше зовнішніх сил. Для розрізів

$$0 \leq z_1 \leq 4\text{м} \quad Q(z_1) = -R_B = -15 \text{ кН}; \text{ для}$$

$$0 \leq z_2 \leq 2.4\text{м} \quad Q(z_2) = R_A = 25 \text{ кН}.$$

За одержаними значеннями на рис. 6,б побудовано епюру поперечної сили Q.

Побудову епюри згинальних моментів виконуємо аналогічно. Згинальний момент дорівнює алгебраїчній сумі моментів лівих (правих) сил відносно центру ваги перерізу.

Для даної балки:

$$\begin{aligned} 0 \leq z_1 \leq 4 \text{ м} \quad M(x_1) &= R_B \cdot z_1 = 15x_1; \\ M(x_1=0) &= 0; \quad M(x_1=4) = 15 \cdot 4 = 60 \text{ кНм}; \\ 0 \leq z_2 \leq 2.4 \text{ м} \quad M(x_2) &= R_A \cdot z_2 = 25x_2; \\ M(x_2=0) &= 0; \quad M(z_2=2.4) = 25 \cdot 2.4 = 60 \text{ кНм}. \end{aligned}$$

З'єднуємо отримані точки та будуємо епюру наведену на рис. 6,в.

Відповідь:  $Q_{\max} = 25 \text{ кН}$ ,  $M_{\max} = 60 \text{ кН*м}$ .

*Приклад 2.* Для балки, наведеної на рис. 7. необхідно: визначити опорні реакції, побудувати епюри  $Q$  і  $M$ ; підібрати поперечний переріз.

*Вирішення. 1.* Для визначення опорних реакцій записуємо рівняння статичної рівноваги:

$$\begin{aligned} \sum Z &= 0 \Rightarrow H_A = 0. \\ \sum M_A &= F \cdot 3,0 - q \cdot 5,0 \cdot 2,5 - M + R_B \cdot 5,0 = 0 \Rightarrow \\ R_B &= \frac{-20 \cdot 3,0 + 20 \cdot 5,0 \cdot 2,5 + 30}{5,0} = 44 \text{ кН}. \\ \sum M_B &= F \cdot 8,0 - R_A \cdot 5,0 + q \cdot 5,0 \cdot 2,5 - M \Rightarrow \\ R_A &= \frac{20 \cdot 8,0 + 20 \cdot 5,0 \cdot 2,5 - 30}{5,0} = 76 \text{ кН}. \end{aligned}$$

При негативному значенні реакції варто змінити її напрямок на протилежний та далі вважати позитивним.

Перевіряємо, чи виконується рівняння  $\sum y = 0$ :

$$-F + R_A - q \cdot 5,0 + R_B = -20 + 76 - 20 \cdot 5,0 + 44 = 0,$$

тобто опорні реакції знайдені правильно.

2. Для визначення внутрішніх силових факторів  $Q$  і  $M$  розбиваємо балку на три ділянки і розглядаємо перерізи 1-1, 2-2, 3-3 на них. Відкидаємо праві частини балки для перерізів 1-1 і 2-2 (ліву - для перерізу 3-3) і розглядаємо рівновагу лівої (правої) частини цих балок.

*Переріз 1-1 (ділянка 1)  $0 < z_1 < 3,0$  м.*

З умови рівноваги  $\Sigma y = 0$  для лівої частини балки одержимо

$$Q_1 = -F = -20 \text{ кН.}$$

Із одержаного рішення можна зробити висновок, що поперечна сила на цій ділянці є постійною, тому її графічне зображення буде прямою лінією, паралельною осі  $z$ .

Згинаючі моменти на першій ділянці одержимо, взявши суму моментів лівих сил відносно перерізу 1-1:

$$M_1 = -F \cdot z_1.$$

З наведеної рівності випливає, що моменти змінюються за лінійним законом. Відповідну епюру одержимо за значеннями моментів:

$$\text{при } z_1 = 0 \quad M_1 = 0;$$

$$z_1 = 3,0 \text{ м} \quad M_1 = -20 \cdot 3,0 = -60 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

*Переріз 2-2 (ділянка 2)  $3,0 \text{ м} < z_2 < 8,0 \text{ м}$ .*

Поперечна сила на цій ділянці описується рівнянням

$$Q_2 = -F + R_A - q(z_2 - 3,0)$$

і змінюється за лінійним законом:

$$\text{при } z_2 = 3,0 \quad Q_2 = -F + R_A = -20 + 76 = 56 \text{ кН;}$$

$$z_2 = 8,0 \text{ м} \quad Q_2 = -F + R_A - q \cdot 5,0 = -20 + 76 - 20 \cdot 5,0 = -44 \text{ кН.}$$

Згинаючий момент відносно перерізу 2-2 визначається рівнянням

$$M_2 = -F \cdot z_2 + R_A(z_2 - 3,0) - q \frac{(z_2 - 3,0)^2}{2}$$

і змінюється за законом квадратної параболи:

при

$$z_2 = 3,0 \quad M_2 = -F \cdot 3,0 = -20 \cdot 3,0 = -60 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$z_2 = 8,0 \text{ м}$$

$$M_2 = -F \cdot 8 + R_A \cdot 5,0 - q \frac{5,0^2}{2} = -20 \cdot 8,0 + 76 \cdot 5,0 - \frac{5,0^2}{2} = -30 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Максимальний згинаючий момент знаходиться в перерізі, де поперечна сила  $Q_2 = 0$ . Виходячи з цього, одержуємо

$$Q_2 = -F + R_A - q \cdot (z_2 - 3,0) = -20 + 76 - 20(z_2 - 3,0) = 0 \Rightarrow z_2 = 5,8 \text{ м}.$$

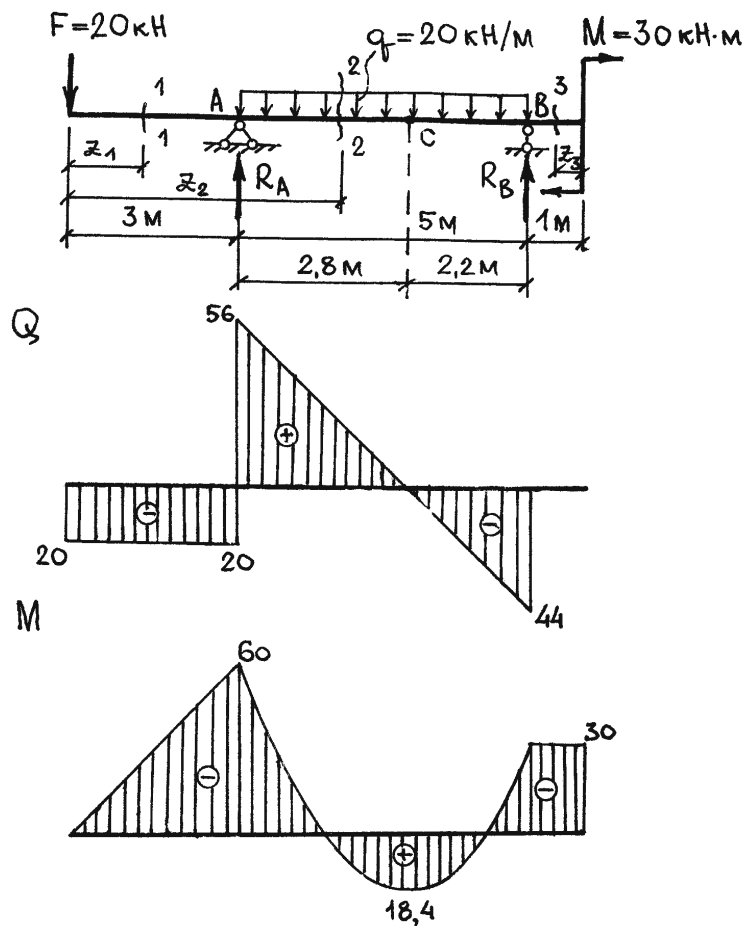


Рис. 7. Епюри  $Q$  і  $M$  для балки, наведеної в прикладі 2.

Максимальний згинаючий момент знаходиться в перерізі на відстані  $5,8 \text{ м}$  від лівого кінця балки і дорівнює

$$M_2^{max} = -F \cdot 5,8 + R_A \cdot (5,8 - 3,0) - q \cdot \frac{(5,8 - 3,0)^2}{2} =$$

$$= -20 \cdot 5,8 + 76 \cdot 2,8 - 20 \cdot \frac{2,8^2}{2} = 18,4 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Переріз 3-3 (ділянка 3)  $0 < z_3 < 1,0 \text{ м}.$

$$Q_3 = 0.$$

$$M_3 = -M = -30 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

Згинаючий момент на цій ділянці постійний і має від'ємне значення (викликає розтягнення верхніх волокон балки).

За одержаними значеннями  $Q$  і  $M$  на границях ділянок будуємо епюри.

3. Поперечний переріз балки підбираємо за максимальним по модулю значенням згинаючого моменту, яке дорівнює  $60 \text{ кН} \cdot \text{м}.$

Стальна балка двотаврового профілю. Вважаючи  $[\sigma] = 160 \text{ МПа},$

Знайдемо  $W_x = \frac{M_{max}}{[\sigma]} = \frac{60}{160 \cdot 10^3} = 0,375 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 375 \text{ см}^3$

За таблицею ДСТУ 8239-89 вибираємо двотавр № 27, для якого

$$W_z = 371 \text{ см}^3, \text{ так, як } \left| \frac{379 - 371}{379} \right| \cdot 100\% = 1,1\% < 2\%.$$

Дерев'яна балка прямокутного профілю. Вважаючи  $[\sigma] = 160 \text{ МПа},$  і

$h = 2b$ , знайдемо

$$W_x = \frac{M_{max}}{[\sigma]} = \frac{60}{10 \cdot 10^3} \geq 6 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 \geq 6 \cdot 10^3 \text{ см}^3.$$

Момент опору прямокутного перерізу

$$\frac{h}{b} = k = 2 \quad W_z = \frac{bh^2}{6} = \frac{\frac{h}{k} \cdot h^2}{6} = \frac{h^3}{6k}$$

Отже одержимо

$$\frac{h^3}{6k} \geq \frac{M_{max}}{[\sigma]} \Rightarrow h \geq \sqrt[3]{\frac{6k \cdot M_{max}}{[\sigma]}} \quad h = 41,6 \text{ см}.$$

Дерев'яна балка круглого профілю. Вважаючи  $[\sigma] = 10 \text{ МПа},$



знайдемо  $W_z = \frac{M_{max}}{[\sigma]} = \frac{60}{10 \cdot 10^3} \geq 6 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 \geq 6 \cdot 10^3 \text{ см}^3.$

Момент опору для круглого перерізу:

$$W_z = \frac{\pi d^3}{32} \text{ отже } \frac{\pi d^3}{32} \geq 6 \cdot 10^3 \text{ см}^3 \Rightarrow d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 6 \cdot 10^3}{3,14}} = 39,4 \text{ см.}$$

*Приклад 3.* Для рами, показаної на рис. 8 визначити опорні реакції, побудувати епюри поперечних і поздовжніх сил, згинаючих моментів.

*Вирішення.* 1. Визначаємо опорні реакції, користуючись рівняннями статичної рівноваги:

$$\Sigma z; \quad q \cdot 2,0 - F - H_B = 20 \cdot 2,0 - 10 - H_B = 0 \Rightarrow$$

$$H_B = 30 \text{ кН}$$

$$\begin{aligned} \Sigma M_A = 0 \quad & -q \cdot 2,0 \cdot 1,0 - M + R_B \cdot 3,0 - H_B \cdot 2,0 = \\ & = -20 \cdot 2,0 \cdot 1,0 - 50 + R_B \cdot 3,0 - 30 \cdot 2,0 = 0 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$R_B = \frac{20 \cdot 2,0 \cdot 1,0 + 50 + 30 \cdot 2,0}{3,0} = 50 \text{ кН.}$$

$$\begin{aligned} \Sigma M_B = 0 \quad & -q \cdot 2,0 \cdot 3,0 - M + F \cdot 2,0 + R_A \cdot 3,0 = \\ & = -20 \cdot 2,0 \cdot 3,0 - 50 + 10 \cdot 2,0 + R_A \cdot 3,0 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$R_A = \frac{20 \cdot 2,0 \cdot 3,0 + 50 - 10 \cdot 2,0}{3,0} = 50 \text{ кН.}$$

Одержані величини опорних реакцій мають додатні значення, тобто їх напрями співпадають з прийнятими.

*Перевірка.*

$$\Sigma y = 0; \quad -R_A + R_B = -50 + 50 = 0.$$

Опорні реакції знайдені правильно.

2. Для визначення  $Q$ ,  $N$  і  $M$  користуємось методом перерізів. Розбиваємо раму на чотири ділянки і розглядаємо перерізи 1-1, 2-2, 3-3, 4-4 на них. Якщо на кожній з ділянок відкинути одну із частин рами, то рівновага частини, що залишиться, буде забезпечуватись відповідними поперечними і поздовжніми силами, згинаючими моментами.

Для усіх перерізів поперечну силу  $Q$  знаходимо з рівняння проекцій сил на осі, перпендикулярні до відповідних стояків і ригелів, поздовжню силу  $N$  – з рівняння проекцій сил на осі, паралельні відповідним стоякам і ригелям; згинаючий момент  $M$  – з рівняння суми моментів від усіх сил, що діють на залишену частину, відносно центру ваги відповідних перерізів.

*Переріз 1-1 (ділянка I)  $0 < z_1 < 2,0$  м.*

$$Q_1 = -q \cdot z_1; \quad N = R_A; \quad M_1 = -\frac{q \cdot z_1^2}{2}$$

На цій ділянці поперечна сила змінюється за лінійним законом, поздовжня сила має постійне значення і розтягує стержень, а згинаючий момент змінюється за законом квадратної параболи:

$$\text{при } z_1 = 0 \quad Q_1 = 0; \quad N_1 = R_A = 50 \text{ кН};$$

$$M_1 = 0;$$

$$z_1 = 2,0 \text{ м} \quad Q_1 = -q \cdot 2,0 = -20 \cdot 2,0 = -40 \text{ кН}; \quad N_1 = R_A = 50 \text{ кН};$$

$$M_1 = -\frac{q \cdot 2,0^2}{2} = -\frac{20 \cdot 2,0^2}{2} = -40 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

*Переріз 2-2 (ділянки 2)  $0 < z_2 < 3,0$  м.*

$$Q_2 = -R_A; \quad N_2 = -q \cdot 2,0; \quad M_2 = -R_A \cdot z_2 - q \cdot 2,0 \cdot 1,0 + M.$$

На цій ділянці поперечна сила має постійне значення; поздовжня сила - також; згинаючий момент змінюється за лінійним законом:

$$\text{при } z_2 = 0 \quad Q_2 = -R_A = -50 \text{ кН}; \quad N_2 = -q \cdot 2,0 = -20 \cdot 2,0 = -40 \text{ кН};$$

$$M_2 = -q \cdot 2,0 \cdot 1,0 + M = -20 \cdot 2,0 \cdot 1,0 + 50 = 10 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$z_2 = 3,0 \text{ м} \quad Q_2 = -R_A = -50 \text{ кН}; \quad N_2 = -q \cdot 2,0 = -20 \cdot 2,0 = -40 \text{ кН};$$

$$M_2 = -R_A \cdot 3,0 - q \cdot 2,0 \cdot 1,0 + M = -50 \cdot 3,0 - 20 \cdot 2,0 \cdot 1,0 + 50 = -140 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

*Переріз 3-3 (ділянка 3)  $0 < z_3 < 2,0$  м.*

$$Q_3 = H_B; \quad N_3 = -R_B; \quad M_3 = -H_B \cdot z_3.$$

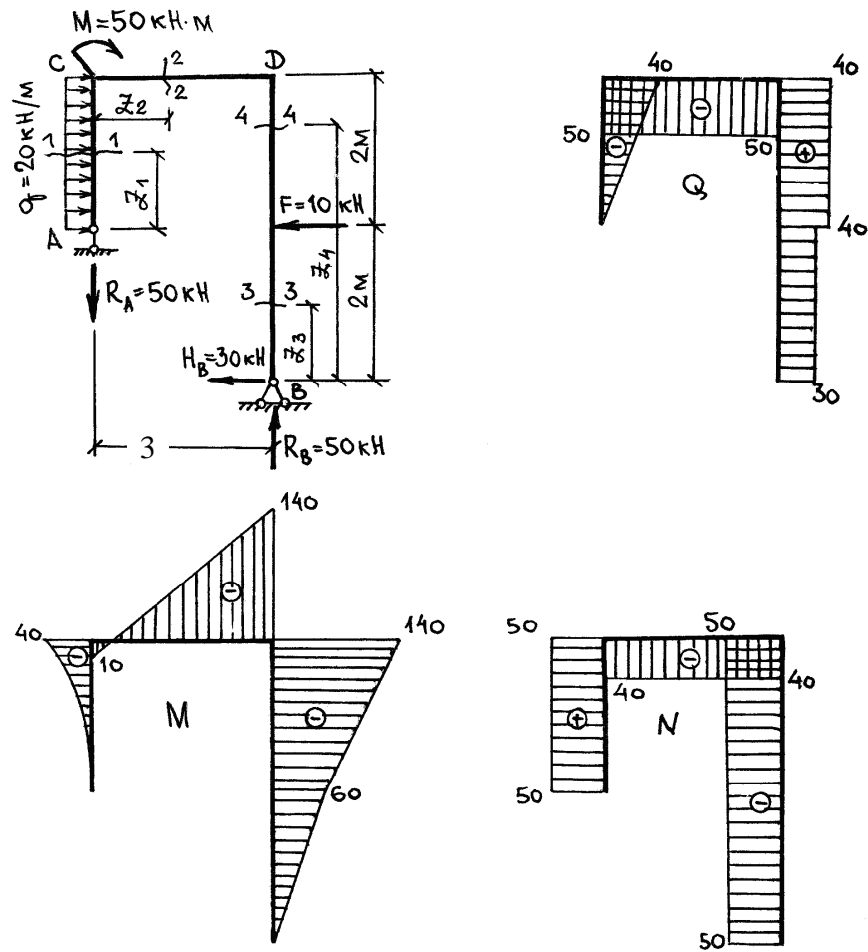


Рис. 8. Епюри  $Q$ ,  $N$  і  $M$  для рами, наведеної в прикладі 3

Поперечна і поздовжня сили на цій ділянці мають постійне значення; згинаючий момент змінюється за лінійним законом:

$$\text{при } z_3 = 0 \quad Q_3 = H_B = 30 \text{ кН}; \quad N_3 = -R_B = -50 \text{ кН}; \quad M_3 = 0;$$

$$z_3 = 2,0 \text{ м} \quad Q_3 = H_B = 30 \text{ кН}; \quad N_3 = -R_B = -50 \text{ кН};$$

$$M_3 = -H_B \cdot 2,0 = -30 \cdot 2,0 = -60 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Переріз 4-4 (ділянка 4)  $2,0 \text{ м} < z_4 < 4,0 \text{ м}$ .

$$Q_4 = H_B + F; \quad N_4 = -R_B; \quad M_4 = -H_B \cdot z_4 - F \cdot (z_4 - 2).$$

На цій ділянці поперечна і поздовжня сили мають постійне значення; згинаючий момент змінюється за лінійним законом:

$$\text{при } z_4 = 2,0 \text{ м} \quad Q_4 = H_B + F = 30 + 10 = 40 \text{ кН}; \quad N_4 = -R_B = -50 \text{ кН};$$

$$M_4 = -H_B \cdot 2,0 = -30 \cdot 2,0 = -60 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$z_4 = 4,0 \text{ м} \quad Q_4 = H_B + F = 30 + 10 = 40 \text{ кН}; \quad N_4 = -R_B = -50 \text{ кН};$$

$$M_4 = -H_B \cdot 4,0 - F \cdot 2,0 = -30 \cdot 4,0 - 10 \cdot 2,0 = -140 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

За результатами обчислень будуюмо епюри  $Q$ ,  $N$  і  $M$ , приймаючи до уваги знаки знайдених величин.

При побудові епюр  $Q$ ,  $N$  додатний напрям осі ординат обираємо вверх (тобто назовні контуру рами); при побудові епюри  $M$  – вниз, бо ця епюра будується на розтягнутих волокнах.

3. Як видно з прикладу, розрахунок рами пов'язаний з великими обчисленнями, що може привести до хибних результатів. Тому знайдені значення  $Q$ ,  $N$  і  $M$  слід перевірити з використанням рівнянь, які не використовувались вище.

Перевірку правильності знайдених значень  $Q$ ,  $N$  і  $M$  проводять за умови рівноваги усіх вузлів рами. Для цього треба вирізати вузли  $C$  і  $D$ , прикласти в перерізах вузлів зусилля  $Q$ ,  $N$  і  $M$  з напрямками, що відповідають правилу знаків (рис.9, б).

Вузол  $C$ . Відзнакою цього вузла є наявність у ньому зовнішнього моменту  $M = 50 \text{ кН} \cdot \text{м}$ . Прикладаємо його до вузла. Складаємо три умови рівноваги (рис. 9,а).

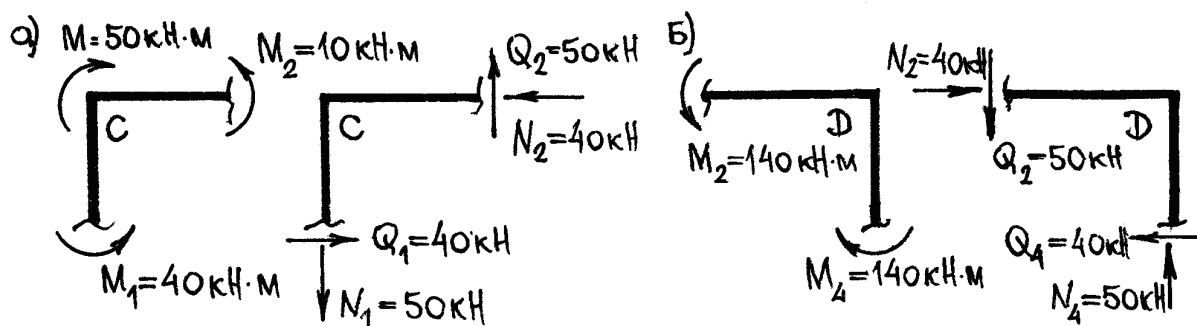


Рис. 9. Вузли  $C$  і  $D$  із зусиллями, що діють в їх перерізах:

$$\Sigma M_C = M_1 + M_2 - M = 40 + 10 - 50 = 0;$$

$$\Sigma z = Q_1 - N_2 = 40 - 40 = 0;$$

$$\Sigma y = -N_1 + Q_2 = -50 + 50 = 0.$$

Всі рівняння задовольняють вимогам рівноваги, тобто вузол знаходиться в рівновазі.

*Вузол D.* Рівняння рівноваги для цього вузла (рис. 8,б):

$$\Sigma M_D = M_2 - M_4 = 140 - 140 = 0;$$

$$\Sigma z = N_2 - Q_4 = 40 - 40 = 0;$$

$$\Sigma y = -Q_2 + N_4 = -50 + 50 = 0.$$

Вузол *D* також знаходиться в рівновазі.

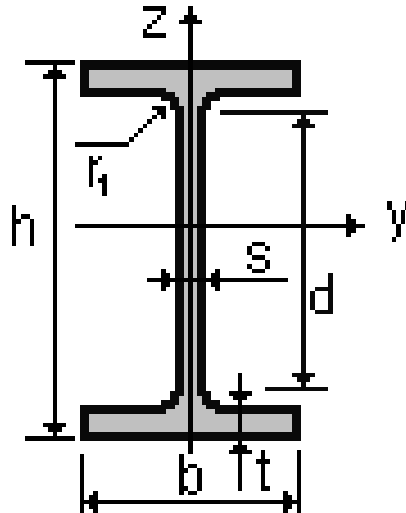
Можна зробити висновок, що зусилля  $Q$ ,  $N$  і  $M$  визначені правильно.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. А.В. Дарков, Г.С. Шпиро. Соппротивление материалов. - М.: Высш. шк., 1975, 654 с.
2. Н.М. Беляев. Соппротивление материалов. - М., Л.: ГИТТЛ, 1951. - 856 с.
3. Соппротивление материалов. / Под общ. ред. Г.С. Писаренко. – К.: Вища школа, 1979, 696 с.
5. Піскунов В.Г., Феодоренко Ю.М., Шевченко В.Ю. та ін. Опір матеріалів з основами теорії пружності й пластичності. - К.: Вища школа, 1994, 423 с.
6. Чихладзе Е.Д. Опір матеріалів: Навч. посібник – Харків: УкрДАЗТ, 2002. – 362 с.

## ДОДАТОК

Двутавр по ДСТУ 8239-89



	h	b	s	t	r <sub>1</sub>	r <sub>2</sub>	A	P	I <sub>y</sub>	W <sub>y</sub>	i <sub>y</sub>	S <sub>y</sub>
	cm	cm	cm	cm	cm	cm	cm <sup>2</sup>	T/m	cm <sup>4</sup>	cm <sup>3</sup>	cm	cm <sup>3</sup>
10	10.0	5.5	0.450	0.720	0.700	0.250	12.0	0.009	198.0	39.700	4.060	23.000
12	12.0	6.4	0.480	0.730	0.750	0.300	14.7	0.012	350.0	58.400	4.880	33.700
14	14.0	7.3	0.490	0.750	0.800	0.300	17.4	0.014	572.0	81.700	5.730	46.800
16	16.0	8.1	0.500	0.780	0.850	0.350	20.2	0.016	873.0	109.000	6.570	62.300
18	18.0	9.0	0.510	0.810	0.900	0.350	23.4	0.018	1290.0	143.000	7.420	81.400
20	20.0	10.0	0.520	0.840	0.950	0.400	26.8	0.021	1840.0	184.000	8.280	104.000
22	22.0	11.0	0.540	0.870	1.000	0.400	30.6	0.024	2550.0	232.000	9.130	131.000
24	24.0	11.5	0.560	0.950	1.050	0.400	34.8	0.027	3460.0	289.000	9.970	163.000
27	27.0	12.5	0.600	0.980	1.100	0.450	40.2	0.032	5010.0	371.000	11.200	210.000
30	30.0	13.5	0.650	1.020	1.200	0.500	46.5	0.037	7080.0	472.000	12.300	268.000
33	33.0	14.0	0.700	1.120	1.300	0.500	53.8	0.042	9840.0	597.000	13.500	339.000
36	36.0	14.5	0.750	1.230	1.400	0.600	61.9	0.049	13380	743.000	14.700	423.000
40	40.0	15.5	0.830	1.300	1.500	0.600	72.600	0.057	19062	953.000	16.200	545.000
45	45.0	16.0	0.900	1.420	1.600	0.700	84.700	0.067	27696	1231.00	18.100	708.000
50	50.0	17.0	1.000	1.520	1.700	0.700	100.00	0.078	39727	1589.00	19.900	919.000
55	55.0	18.0	1.100	1.650	1.800	0.700	118.00	0.093	55962	2035.00	21.800	1181.00
60	60.0	19.0	1.200	1.780	2.000	0.800	138.00	0.108	76806	2560.00	23.600	1491.00

## НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Методичні вказівки до самостійної роботи та виконання розрахунково-графічних і практичних завдань з курсу опору матеріалів «Згін балок та рам» (для студентів 2 курсу денної і заочної форм навчання бакалаврів за напрямом 0921 (6.060101) - «Будівництво» з професійного спрямування «Міське будівництво і господарство», «Теплогазопостачання та вентиляція»).

**Укладачі:** Наталя Василівна Середа,

Михаїл Юрієвич Смолянінов

Олександр Олексійович Чупринін

**Відповідальний за випуск:** Л.С.Андрієвська

**Редактор:** М.З.Аляб'єв

**Верстка:** І.В. Волосожарова

План 2009, поз. 245М

---

Підп. до друку 30.06.2009  
Друк на ризографі  
Тираж 50 прим.

Формат 60\*84 1/16  
Умовн.-друк. арк. 1,3  
Замовл. №

Папір офісний  
Обл.-вид. арк. 1,6

---

61002, Харків, ХНАМГ, вул. Революції, 12

---

61002, Харків, ХНАМГ, вул. Революції, 12  
Сектор оперативної поліграфії ЦНІТ ХНАМГ